

NACH VORGABE EINES SYSTEMS VON n LINEAREN GLEICHUNGEN IN n VARIABLEN WERDEN DIE WERTE DER UNBEKANNTEN VERMÖGE $(n - 1)$ -FACHER BESTIMMTER INTEGRALE DARGEBOTEN*

Carl Gustav Jacob Jacobi

1.

Ich werde, wie schon des Öfteren, mit dem Ausdruck

$$\sum \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \cdots a_{n,n}$$

das Aggregat aller Terme bezeichnen, welche aus dem einen

$$a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}$$

hervorgehen, nachdem alle ersten sowie zweiten Indizes auf alle möglichen Arten untereinander vertauscht worden sind; der Hälfte der Terme ist dabei das Vorzeichen $+$ vorangestellt, der anderen Hälfte das Vorzeichen $-$, wobei das Gesetz für die Vorzeichen so bestimmt ist, dass aus den Indizes, nachdem je zwei beliebige zweite oder erste vertauscht worden sind, alle positiven in negative übergehen und umgekehrt. Die Bildung von Aggregaten dieser Art

*Originaltitel: "Dato Systemate n Aequationum linearum inter n Incognitas, Valores Igconitarum per Integralia definita $(n - 1)$ tuplica exhibentur", *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 14 (1834): pp. 51–55; Nachdruck in: G.G.J. Jacobi's gesammelte Werke – Band 6, pp. 79 – 85, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

ist wohlbekannt und findet sehr häufige Anwendung in der algebraischen Auflösung von linearen Gleichungen; mit diesem Gegenstand halte ich mich also nicht auf, zumal selbiger vor einiger Zeit vom illustren Herrn LAPLACE umfassend abgehandelt worden ist. Ich erwähne an dieser Stelle noch, dass wir im Folgenden im angegebenen Aggregat den Term

$$a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n}$$

als positiv annehmen, woher der ganze Ausdruck vollständig bestimmt ist.

Weiter bezeichne ich mit dem Ausdruck

$$\sum a_{\kappa,\lambda} x_{\kappa} x_{\lambda}$$

das Aggregat aller Terme, welche aus einem einzigen Term hinter dem Summenzeichen hervorgehen, wenn man beiden Indizes κ, λ nacheinander alle Werte $1, 2, 3, \dots, n$ zuteilt. Ich setze weiter

$$a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa},$$

woher im vorgelegten Ausdruck die Terme, in denen $\kappa = \lambda$ ist, oder welche mit den Quadraten der Variablen x_{κ} multipliziert werden, einmal, alle übrigen hingegen zweimal gefunden werden. Wir wollen schließlich

$$x_n = \sqrt{1 - x_1x_1 - x_2x_2 - \cdots - x_{n-1}x_{n-1}}$$

setzen, wobei die Wurzel als positiv angenommen wird; ich habe in meiner Abhandlung über Mehrfachintegrale (*Diar. Crell. Vol. XII, Seite 64*, vergl. Buch III, S. 262 dieser Ausgabe) die Formel

$$(1) \quad \int \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n (\sum a_{\kappa,\lambda} x_{\kappa} x_{\lambda})^{\frac{1}{2}n}} = \frac{2^{n-1} S}{\sqrt{\sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}}}$$

angegeben, in welcher das Integral über alle positiven wie negativen reellen Werte der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ erstreckt wird, für welche x_n einen reellen Wert hat, oder für welche

$$x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_{n-1}x_{n-1} \leq 1$$

gilt, und S die Zahl

$$S = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

bedeutet, wenn n gerade ist, oder

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

wenn n ungerade ist. Ich habe die Zahl 2^{n-1} anstelle von 2^n , welche man an zitierter Stelle liest, geschrieben, weil an jener Stelle der doppelte Wert des Integrals gemeint ist. Weiter wird in der vorherigen Formel angenommen, dass der Wert des Ausdrucks

$$\sum a_{\kappa,\lambda} x_{\kappa} x_{\lambda}$$

für alle reellen Werte von $x_1, x_2, \dots, x_n$ positiv ist.

Wir wollen nun festlegen, dass ein System von n linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + a_{1,3}y_3 + \cdots + a_{1,n}y_n &= m_1, \\ a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + a_{2,3}y_3 + \cdots + a_{2,n}y_n &= m_2, \\ (1) \quad a_{3,1}y_1 + a_{3,2}y_2 + a_{3,3}y_3 + \cdots + a_{3,n}y_n &= m_3, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + a_{n,3}y_3 + \cdots + a_{n,n}y_n &= m_n \end{aligned}$$

gegeben ist; der Kürze wegen sei

$$\sum \pm a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n} = N.$$

Ich habe nun in der zitierten Abhandlung auf Seite 20 (vergl. Band 3, Seite 214 dieser Ausgabe) bemerkt, wenn die Größen $a_{\kappa,\lambda}$ alle verschieden sind, dass die Werte der Unbekannten mit den partiellen Ableitungen von N vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned}
Ny_1 &= \frac{\partial N}{\partial a_{1,1}}m_1 + \frac{\partial N}{\partial a_{2,1}}m_2 + \frac{\partial N}{\partial a_{3,1}}m_3 + \cdots + \frac{\partial N}{\partial a_{n,1}}m_n, \\
Ny_2 &= \frac{\partial N}{\partial a_{1,2}}m_1 + \frac{\partial N}{\partial a_{2,2}}m_2 + \frac{\partial N}{\partial a_{3,2}}m_3 + \cdots + \frac{\partial N}{\partial a_{n,2}}m_n, \\
(3) \quad Ny_3 &= \frac{\partial N}{\partial a_{1,3}}m_1 + \frac{\partial N}{\partial a_{2,3}}m_2 + \frac{\partial N}{\partial a_{3,3}}m_3 + \cdots + \frac{\partial N}{\partial a_{n,3}}m_n, \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
Ny_n &= \frac{\partial N}{\partial a_{1,n}}m_1 + \frac{\partial N}{\partial a_{2,n}}m_2 + \frac{\partial N}{\partial a_{3,n}}m_3 + \cdots + \frac{\partial N}{\partial a_{n,n}}m_n
\end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Wenn aber $a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa}$ ist, wie in Formel (1) angenommen wird, wird die partielle Ableitung nach $a_{\kappa,\lambda}$, sofern nicht $\kappa = \lambda$ ist, erlangt, wenn zuerst $a_{\kappa,\lambda}$ und $a_{\lambda,\kappa}$ als verschieden festgelegt werden, und die partiellen Ableitungen nach $a_{\kappa,\lambda}$ und $a_{\lambda,\kappa}$ zusammengefügt werden und dann $a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa}$ gesetzt wird; weil auf diese Weise beide Differentiale gleich werden, wird im Fall $a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa}$ ein Wert doppelt so groß wie der, der in den Formeln (3) Geltung haben muss, hervorgehen. Daher werden im Fall $a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa}$, welcher im Vorherigen vorausgesetzt wird, anstelle der Formeln (3) die folgenden zu setzen sein:

$$\begin{aligned}
Ny_1 &= \frac{\partial N}{\partial a_{1,1}}m_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{2,1}}m_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{3,1}}m_3 + \cdots + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{n,1}}m_n, \\
Ny_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{1,2}}m_1 + \frac{\partial N}{\partial a_{2,2}}m_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{3,2}}m_3 + \cdots + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{n,2}}m_n, \\
(4) \quad Ny_3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{1,3}}m_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{2,3}}m_2 + \frac{\partial N}{\partial a_{3,3}}m_3 + \cdots + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{n,3}}m_n, \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
Ny_n &= \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{1,n}}m_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{2,n}}m_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial a_{3,n}}m_3 + \cdots + \frac{\partial N}{\partial a_{n,n}}m_n
\end{aligned}$$

Mithilfe dieser Formeln leitet man aus dem Wert von $\frac{1}{\sqrt{N}}$, welchen wir Formel

(1) gegeben haben, diese Ausdrücke für die Unbekannten ab:

$$\begin{aligned}
 \frac{2^{n-1}S}{n} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{N}} &= \int^{n-1} \frac{x_1(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)dx_1dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n (\sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa x_\lambda)^{\frac{1}{2}(n+2)}} \\
 \frac{2^{n-1}S}{n} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{N}} &= \int^{n-1} \frac{x_2(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)dx_1dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n (\sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa x_\lambda)^{\frac{1}{2}(n+2)}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{2^{n-1}S}{n} \cdot \frac{y_n}{\sqrt{N}} &= \int^{n-1} \frac{x_n(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)dx_1dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n (\sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa x_\lambda)^{\frac{1}{2}(n+2)}}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Dies sind die gesuchten Ausdrücke.

2.

Die Formeln (5) setzen die zwei Bedingungen voraus, dass $a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa}$ ist und der Ausdruck

$$\sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa x_\lambda$$

für alle reellen Werte von $x_1, x_2, \dots, x_n$ einen positiven Wert hat. Daher muss das System der vorgelegten linearen Gleichungen (2), dessen Lösung mit den Formeln (5) dargeboten wird, als nicht vollkommen allgemein angesehen werden. Aber man führt es leicht auf die allgemeinen Formeln zurück.

Es sei dazu das allgemeine System von n linearen Gleichungen in den n Unbekannten $z_1, z_2, \dots, z_n$

$$\begin{aligned}
 b_{1,1}z_1 + b_{1,2}z_2 + b_{1,n}z_n &= m_1, \\
 b_{2,1}z_1 + b_{2,2}z_2 + b_{2,n}z_n &= m_2, \\
 \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\
 b_{n,1}z_1 + b_{n,2}z_2 + b_{n,n}z_n &= m_n
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

ohne jedwede Zusatzbedingung an die Koeffizienten vorgelegt. Man setze weiter

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & z_1 = b_{1,1}y_1 + b_{2,1}y_2 + \cdots + b_{n,1}y_n, \\
 & z_2 = b_{1,2}y_1 + b_{2,2}y_2 + \cdots + b_{n,2}y_n, \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & z_n = b_{1,n}y_1 + b_{2,n}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n.
 \end{aligned}$$

Nachdem diese Werte von $z_1, z_2, \dots, z_n$ in (6) eingesetzt worden sind, wollen wir festlegen, dass das System von Gleichungen (2) hervorgeht. Daher hat man allgemein:

$$(8) \quad a_{\kappa,\lambda} = b_{\kappa,1}b_{\lambda,1} + b_{\kappa,2}b_{\lambda,2} + \cdots + b_{\kappa,n}b_{\lambda,n}$$

Diese Werte von $a_{\kappa,\lambda}$ sind solche, dass sie jeder der beiden oben vorgelegten Bedingungen genügen. Denn es ist auf den ersten Blick klar, dass aus (8)

$$a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa}$$

wird und man

$$\begin{aligned}
 \sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa x_\lambda = & (b_{1,1}x_1 + b_{2,1}x_2 + \cdots + b_{n,1}x_n)^2 \\
 & + (b_{1,2}x_1 + b_{2,2}x_2 + \cdots + b_{n,2}x_n)^2 \\
 & + \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & + (b_{1,n}x_1 + b_{2,n}x_2 + \cdots + b_{n,n}x_n)^2
 \end{aligned}$$

hat; dieser Ausdruck ist evident, für alle reellen Werte von $x_1, x_2, \dots, x_n$ immer positive Werte zu haben. Daher lassen sich für die Werte von $a_{\kappa,\lambda}$, welche Formel (8) darbietet, die Formeln (5) sicher verwenden. Also, wenn man darüber hinaus die bekannte oder leicht prüfbare Formel

$$(9) \quad \sum \pm a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n} = \left(\sum \pm b_{1,1}b_{2,2} \cdots b_{n,n} \right)^2$$

bemerkt, haben wir aus (7) das folgende:

THEOREM

“Es sei das folgende System von linearen Gleichungen in den n Unbekannten $z_1, z_2, \dots, z_n$ vorgelegt:

$$\begin{aligned} b_{1,1}z_1 + b_{1,2}z_2 + \dots + b_{1,n}z_n &= m_1, \\ b_{2,1}z_1 + b_{2,2}z_2 + \dots + b_{2,n}z_n &= m_2, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ b_{n,1}z_1 + b_{n,2}z_2 + \dots + b_{n,n}z_n &= m_n; \end{aligned}$$

wir wollen

$$\begin{aligned} X = & (b_{1,1}x_1 + b_{2,1}x_2 + \dots + b_{n,1}x_n)^2 \\ & + (b_{1,2}x_1 + b_{2,2}x_2 + \dots + b_{n,2}x_n)^2 \\ & + \dots\dots\dots \\ & + (b_{1,n}x_1 + b_{2,n}x_2 + \dots + b_{n,n}x_n)^2 \end{aligned}$$

setzen; weiter sei

$$M = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n,$$

mit

$$x_n = \sqrt{1 - x_1x_1 - x_2x_2 - \dots - x_{n-1}x_{n-1}},$$

wobei die Wurzel als positiv angenommen wird; überdies wollen wir

$$\Delta = \pm (\sum \pm b_{1,1}b_{2,2} \dots b_{n,n})$$

setzen, wobei das doppeldeutige Vorzeichen vor der Summe $\sum$ so bestimmt werden, dass ein positiver Wert hervorgeht. Nach Festlegen all dessen wird

$$\begin{aligned}
\frac{2^{n-1}S}{n} \cdot \frac{z_1}{\Delta} &= \int^{n-1} \frac{M(b_{1,1}x_1 + b_{2,1}x_2 + \cdots + b_{n,1}x_n)dx_1dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n X^{\frac{1}{2}(n+2)}}, \\
\frac{2^{n-1}S}{n} \cdot \frac{z_2}{\Delta} &= \int^{n-1} \frac{M(b_{1,2}x_1 + b_{2,2}x_2 + \cdots + b_{n,2}x_n)dx_1dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n X^{\frac{1}{2}(n+2)}}, \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{2^{n-1}S}{n} \cdot \frac{z_n}{\Delta} &= \int^{n-1} \frac{M(b_{1,n}x_1 + b_{2,n}x_2 + \cdots + b_{n,n}x_n)dx_1dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n X^{\frac{1}{2}(n+2)}}
\end{aligned}$$

sein, während die $(n-1)$ -fachen Integrale über alle positiven wie negativen reellen Werte von $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ erstreckt werden, für welche auch x_n reell wird oder für welche

$$x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_{n-1}x_{n-1} \leq 1$$

gilt; dabei bezeichnet S entweder

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

je nachdem ob n gerade oder ungerade ist."

Verfasst am Tage des 3. Dezember, 1834.